FONCTIONS POLYNÔMES

1. Fonction polynôme de degré quelconque

1.1. Définition

On appelle fonction polynôme (à coefficients réels) de degré n ($n \in \mathbb{N}$) toute fonction P **définie sur** $\mathbb{R}$ dont l'écriture peut se ramener à la forme :

$$\boldsymbol{P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{où } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ réels avec } a_n \neq 0}$$

Le terme $a_p x^p$ s'appelle monôme de degré p. On note $n = \deg(P)$.

Exemples et contre-exemples :

- La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme de degré 6.
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $p(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) sont des fonctions polynômes de degré p (avec la convention $0^0 = 1$ lorsque $p = 0$).
- Les fonctions affines $x \longmapsto ax + b$, avec $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 1.
- Les fonctions constantes $x \longmapsto k$, avec $k \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 0.
- La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme.
- Attention aux faux-amis ! La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme de degré 2, car après simplifications, on obtient $f(x) = x^2 - 1$. Cependant, la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = \pm 1$.

Remarques :

- Une fonction polynôme à coefficients réels est continue sur $\mathbb{R}$. (Voir leçon sur le calcul différentiel)
- Une fonction du type $P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où tous les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels nuls s'appelle la fonction polynôme nulle. Une telle fonction polynôme n'a pas de degré. (En fait, on considère, par convention, que c'est $-\infty$ afin d'assurer la comptabilité de certaines relations sur les degrés)
- On peut définir des fonctions polynômes avec des coefficients dans un ensemble A autre que $\mathbb{R}$. (Cela peut être par exemple le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$). Cependant l'ensemble A doit posséder un certain nombre de propriétés algébriques (A doit être un anneau commutatif(1)).

---

(1)

Notion de groupe	**Notion d' anneau**
Un ensemble G est un groupe si il est muni d'une l.c.i $*$ (loi de composition interne) vérifiant les trois propriétés suivantes : • Existence d'un élément neutre e : $\forall x \in G,\ e * x = x * e = x$ • Associativité de la loi $*$: $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$ • Existence d'un symétrique pour tout x de E : $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$ Si de plus la l.c.i. est commutative : $\forall x, y \in G,\ x * y = y * x$ Alors le groupe $(G, *)$ est dit commutatif (ou Abélien). Dans ce cas la loi $*$ sera souvent notée $+$, le neutre e noté 0 et le symétrique y noté $-x$.	Un groupe commutatif $(A, +)$ est un anneau s'il est muni d'une seconde l.c.i. notée généralement multiplicativement vérifiant les propriétés suivantes : • Associativité de la multiplication : $\forall x, y, z \in A,\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z) = x \times y \times z$ • Distributivité par rapport à l'addition : $\forall x, y, z \in A,\ (x + y) \times z = x \times z + y \times z$ et $z \times (x + y) = z \times x + z \times y$ • Existence d'un élément neutre noté 1 : $\forall x \in A,\ 1 \times x = x \times 1 = x$ Si de plus la seconde l.c.i. est commutative : $\forall x, y \in A,\ x \times y = y \times x$ Alors l'anneau $(A, +, \times)$ est dit commutatif Un anneau commutatif A dans lequel tout élément non nul est inversible pour la multiplication ($\forall x \in A,\ \exists y \in A$ tel que $x \times y = 1$) est appelé un corps. (L'inverse y de x sera souvent noté x^{-1}) Un anneau A est intègre si : $\forall x, y \in A,\ xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$

- On appelle polynôme P sur un anneau A, toute suite (a_n) ($n \in \mathbb{N}$) d'éléments de A tous nuls sauf un nombre fini. L'indice n du dernier élément non nul de la suite (il existe en général puisque seuls un nombre fini d'éléments de la suite sont non nuls. Le seul cas où l'entier n n'existe pas est lorsque tous les éléments de la suite (a_n) sont nuls) s'appelle le degré de P. On note X le polynôme défini par la suite particulière $(0 ; 1 ; 0 ; 0 ; ... ; 0 ; ...)$. X s'appelle l'indéterminée (c'est un polynôme particulier). On montre alors que tout polynôme P de degré n peut s'écrire $P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ où X^n désigne la suite $(0 ; ... ; 0 ; 1 ; 0 ; ...)$ avec un "1" en $n^{\text{ème}}$ position (c'est le cœur de la construction de la théorie des polynômes, mais la démonstration n'est pas à la portée de ce cours ...). Enfin, précisons que si un polynôme P a tous ses coefficients nuls, on dit que P est le polynôme nul et avec la même convention que pour les fonctions polynômes, on pose alors $\deg(P) = -\infty$.
- Il est d'usage de confondre fonction polynôme et polynôme. Cela est loisible lorsque les coefficients sont dans $\mathbb{R}$ (ou dans un corps commutatif). Mais un tel abus peut tomber en défaut si les coefficients sont dans un anneau A non intègre. (Voir divers encadrés ci-dessous)

<u>Exercice</u> : Soient P et Q des fonctions polynômes non nulles. Démontrer que :

$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P) ; \deg(Q)) \quad \text{et} \quad \deg(PQ) \leqslant \deg(P) + \deg(Q)$$

Notons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0$ avec $b_m \neq 0$.

Pour la somme $P + Q$, distinguons trois cas :

- Si $m < n$ alors, $P(x) + Q(x) = a_n x^n + ...$ donc $\deg(P + Q) = \deg(P)$.
- Si $n < m$ alors, $P(x) + Q(x) = b_mx^m + ...$ donc $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.
- Si $n = m$ alors, $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + ...$
  - Si $a_n + b_n \neq 0$ alors $\deg(P + Q) = n = \deg(P)$.
  - Si $a_n + b_n = 0$, alors $\deg(P + Q) < n$, c'est-à-dire $\deg(P + Q) < \deg(P)$.

Bilan : dans tous les cas, on a $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P) ; \deg(Q))$

Pour le produit PQ, on écrit $PQ = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1x + a_0)(b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0)$

En développant, on obtient : $PQ = a_nb_mx^{n+m} + ...$ (termes de degré inférieurs)

En général (et notamment si les coefficients sont réels), $a_nb_m \neq 0$ (puisque $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$).

Donc, en général, $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

> Si les coefficients ne sont pas réels, on peut ne pas avoir l'égalité $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
> Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, considérer $P = \bar{2}\,X$ et $Q = \bar{2}\,X$ ($\deg(P) = \deg(Q) = 1$)
> $PQ = \bar{2}\,X \times \bar{2}\,X = \bar{4}\,X^2 = \bar{0}$, donc $\deg(PQ) = -\infty$

2. Division euclidienne d'un polynôme *A* par un polynôme *B* (non nul)

Dans ce paragraphe, les polynômes considérés sont à coefficients réels (ou dans un corps commutatif $\mathbb{K}$).

On rappelle que dans ce cas, si A et B sont des polynômes non nuls, on a : $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

<u>2.1. Théorème</u>

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels (ou dans un corps commutatif $\mathbb{K}$) avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficient réels tels que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Exemple et calcul pratique de Q et R :

$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$

$B = X^2 - 5X + 4$

On pose la division en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres :

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 & X^2 - 5X + 4 \\ \cline{2-2}
\underline{X^4 - 5X^3 + 4X^2 \qquad\qquad\quad} & X^2 - 2X + 3 \\
-2X^3 + 13X^2 - 17X + 6 & \\
\underline{-2X^3 + 10X^2 - 8X \qquad} & \\
3X^2 - 9X + 6 & \\
\underline{3X^2 - 15X + 12} & \\
6X - 6 &
\end{array}$$

On a donc $Q = X^2 - 2X + 3$ et $R = 6X - 6$.

Ce qui nous permet d'écrire :

$$X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 = (X^2 - 5X + 4)(X^2 - 2X + 3) + 6X - 6$$

Démonstration du théorème 2.1.

Unicité du couple (Q, R) :

Supposons qu'il existe des couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) de polynômes tels que :

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$$

avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$.

Posons : $$Q = Q_1 - Q_2 \text{ et } R = R_2 - R_1$$

Ainsi : $$BQ = BQ_1 - BQ_2 = R_2 - R_1 = R$$

Et comme et $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$, on en déduit :

$$\deg(R) < \deg(B) \quad (\ast)$$

Mais par ailleurs, si $Q \neq 0$, on a : $\deg(R) = \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q)$.

Comme $\deg(Q) \geqslant 0$ puisque $Q \neq 0$, on a : $\deg(R) \geqslant \deg(B)$ $(\ast\ast)$

La condition $(\ast\ast)$ contredit $(\ast)$ donc $Q = 0$.

On en déduit $Q_1 = Q_2$ et donc $BQ = R = 0$ d'où $R_1 = R_2$, d'où l'unicité du couple (P, Q).

Existence du couple (Q, R) :

Notons :

$A(x) = a\,x^d + \ldots$ (termes de degrés inférieurs) avec $d = \deg(A)$ et donc $a \neq 0$

$B(x) = b\,x^n + \ldots$ (termes de degrés inférieurs) avec $n = \deg(B)$ et donc $b \neq 0$

Si $d < n$, alors $Q = 0$ et $R = A$ conviennent (puisque $A = B \times 0 + A$ avec $\deg(A) < \deg(B)$)

Supposons désormais $n \geqslant d$:

Considérons le polynômes Q_1 défini par : $Q_1(x) = \dfrac{a}{b}\,x^{d-n}$ (bien défini car $b \neq 0$)

On a ainsi : $Q_1B = \dfrac{a}{b}\,x^{d-n} \times (\,b\,x^n + \ldots) = a\,x^d + \ldots$

Si on pose alors : $A_1 = A - Q_1B$, on obtient alors un polynôme de degré d_1 tel que $d_1 < d$.

Maintenant, si $d_1 < n$ alors $Q = Q_1$ et $R = A_1$ conviennent (puisque $A = BQ_1 + A_1$ avec $\deg(A_1) < \deg(B)$)

Sinon, on réitère le procédé comme ci-dessus en construisant des polynômes Q_2 et A_2 à partir de A_1 et B :

$$Q_2(x) = \frac{a_1}{b}\,x^{d_1-n} \text{ et } A_2 = A_1 - Q_2B$$

où a_1 désigne le coefficient principal de A_1.

Ainsi, on vérifie que : $\deg(A_2) < \deg(A_1) < \deg(A)$ et $A = B(Q_1 + Q_2) + A_2$.

Et ainsi de suite...

Le processus s'arrête nécessairement au bout d'un nombre fini N d'étapes (puisque la suite des degrés (d_k) est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, donc il existe un rang N tel que $d_N < n$. On a alors :

$$A = B(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_N) + A_N$$

Les polynômes $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_N$ et $R = A_N$ conviennent (puisque $\deg(A_N) < \deg(B)$)

Exemple : En reprenant

$A = X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6$

$B = X^2 - 5X + 4$

et la division posée ci-dessus, on a : $N = 3$, $Q_1 = X^2$; $Q_2 = -2X$ et $X_3 = 3$.

Cas particulier : si $R = 0$, alors $A = BQ$, on dit alors que le polynôme B divise A.

3. Racine d'un polynôme et factorisation d'un polynôme

3.1. Définition

On appelle racine réelle d'une fonction polynôme P (à coefficients réels) tout réel λ tel que :

$$P(\lambda) = 0.$$

Exemples :

- Trouver les racines de la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 1)$.

  Il y a une racine évidente : $x_1 = 1$. Les autres s'obtiennent en étudiant le trinôme $x^2 - x - 1$.

  On a $\Delta = 5$ d'où $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Les fonctions polynômes du 1er degré $x \longmapsto ax + b$ (où a et b sont des réels avec $a \neq 0$) admettent toutes une seule racine $\lambda = -\dfrac{b}{a}$.

- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle. Par exemple $x^2 + 1$ qui est strictement positif. Remarque : une fonction polynôme sans racine réelle est nécessairement de signe constant (puisque continue).

3.2. Théorème

Si une fonction polynôme P à coefficients réels de degré n ($n \geqslant 1$) a une racine réelle $x = \lambda$, alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x - \lambda)$:

$$P(x) = (x - \lambda)\,Q(x) \text{ où } Q \text{ est une fonction polynôme de degré } n - 1.$$

Exemple : ce théorème est quotidiennement illustré par les égalités remarquables :

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) \text{ (vérification facile)}$$

Démonstration :

On effectue la division euclidienne de P par $X - \lambda$. D'après le théorème, il existe un couple (Q, R) de polynômes tels que : $$P = (X - \lambda)Q + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(X - \lambda)$$

Or, $\deg(X - \lambda) = 1$, donc $\deg(R) = 0$ ou $-\infty$. R est donc une fonction polynôme constante.

Par ailleurs, λ est une racine de P. On a donc : $0 = P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$

Donc $R(\lambda) = 0$. Donc R est la fonction polynôme nulle et le théorème est pratiquement démontré. Il reste encore à prouver que $\deg(Q) = n - 1$, ce qui est une conséquence de la relation $\deg(P) = \deg(X - \lambda) + \deg(Q)$ (On a égalité puisque les coefficients sont réels) d'où : $n = 1 + \deg(Q)$, c.q.f.d.

3.3. Théorème

Une fonction polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients réels possède au plus n racines réelles.

Démonstration :

Puisque P a un degré, P n'est pas la fonction polynôme nulle.

Raisonnons par l'absurde. Si la fonction P possède p racines avec $p > n$, en notant λ_1, ... , λ_p ces racines, on a, d'après le théorème de factorisation (appliqué p fois) :

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_p)Q(x)$$

où Q est une fonction polynôme de degré $n - p < 0$, donc $Q = 0$ et, par suite, $P = 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale d'où $p \leqslant n$.

La fonction polynôme P possède donc au plus n racines réelles.

Ce théorème peut ne pas être valable si les coefficients sont non réels :

Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, considérer $P = X^2 - \bar{1}$

P est de degré 2 et possède pourtant 4 racines :

$$\tilde{P}(\bar{1}) = \tilde{P}(\bar{3}) = \tilde{P}(\bar{5}) = \tilde{P}(\bar{7}) = \bar{0}$$

3.4. Corollaire

Une fonction polynôme P à coefficients réels de degré n admettant plus de n (ou une infinité) de racines réelles est la fonction polynôme nulle.

Démonstration :

Si P n'est pas la fonction polynôme nulle, alors elle a un degré $n \in \mathbb{N}$ et d'après le théorème 3.3. admet au plus n racines réelles. Donc si elle admet plus que n (ou une infinité) de racines réelles, elle est nécessairement nulle.

Application : démontrer que deux fonctions polynômes P et Q à coefficients réels de degré au plus n qui coïncident en $n + 1$ points sont égales.

Il suffit de considérer la fonction polynôme $P - Q$ qui est de degré au plus n et qui possède $n + 1$ racines réelles.

Donc, d'après le corollaire, $P - Q$ est la fonction polynôme nulle donc $P = Q$.

4. Égalité entre deux polynômes

4.1. Définition

- Deux fonctions polynômes P et Q sont égales si : $\boldsymbol{P(x) = Q(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(C'est l'égalité telle qu'elle a été définie pour les fonctions)

- Deux polynômes P et Q sont égaux si les suites qui les définissent sont égales.

(Ceci entraîne nécessairement : $\deg(P) = \deg(Q)$ et les coefficients des monômes de même degré de P et Q sont égaux)

Exemples :

- Les fonctions P et Q définies par : $P(x) = x^4 + 1$ et $Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$ sont-elles égales ?

  On a $P(0) = Q(0) = 1$; $P(1) = Q(1) = 2$; $P(-1) = Q(-1) = 2$ et $P(2) = Q(2) = 17$.

  P et Q semblent égales, cependant il faut le vérifier pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. Ce qui peut être long si l'on ne dispose de critère plus adapté.

- Les fonctions R et S définies par $R(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ et $S(x) = x^3 - x$ sont-elles égales ?

  On a $R(0) = S(0) = 0$, $R(1) = S(1) = 0$, $R(-1) = S(-1) = 0$ et $R(3) = S(3) = 24$.

  La encore, R et S semblent égales alors qu'elles ne sont pas du même degré.

Le théorème suivant est un critère pratique pour comparer des fonctions polynômes :

4.2. Théorème

Deux fonctions polynômes P et Q à coefficients réels sont égales ssi :

– elles ont même degré

– les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Ce théorème peut ne pas être valable si les coefficients sont non réels :
Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, considérer $P = X$ et $Q = X^3$.
$\tilde{P}(\bar{0}) = \tilde{Q}(\bar{0}) = \bar{0}$, $\tilde{P}(\bar{1}) = \tilde{Q}(\bar{1}) = \bar{1}$ et $\tilde{P}(\bar{2}) = \tilde{Q}(\bar{2}) = \bar{2}$. On a $\tilde{P} = \tilde{Q}$ et $P \neq Q$.

Autrement dit, des fonctions polynômes à coefficients réels sont égales si et seulement si leur polynômes correspondant le sont.

Démonstration : Soient P et Q des fonctions polynômes à coefficients réels.

Notons :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ (n est le degré de P donc $a_n \neq 0$)}$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \text{ (m est le degré de Q donc $b_m \neq 0$)}$$

Supposons $P = Q$ (c'est-à-dire, d'après la définition $P(x) = Q(x)$, pour tout réel x) avec pour fixer les idées l'hypothèse $n \geqslant m$.

Alors : $$P(x) - Q(x) = a_n x^n + \ldots + (a_m - b_m)x^m + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

En outre $P(x) - Q(x) = 0$ pour tout réel x, donc la fonction polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, c'est donc la fonction polynôme nulle.

Par conséquent, tous ses coefficients sont nuls, donc $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; ... ; $a_m = b_m$ et $n = m$ puisqu'on ne peut avoir $a_n = 0$ par hypothèse. La réciproque est évidente.

Exemples : poursuivons les deux exemples précédents :

- En développant $Q(x)$, on obtient : $Q(x) = x^4 - \sqrt{2}\,x^3 + x^2 + \sqrt{2}\,x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}\,x + x^2 - 2x + 1 = x^4 + 1 = P(x)$
- R et S ne sont pas de même degré donc elles ne sont pas égales. (Pour s'en convaincre complètement, calculer $R(2)$ et $S(2)$)

Exercices :

- Factoriser $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - x - 2$ sachant que $P(2) = 0$. (En effet, $P(2) = 24 - 20 - 2 - 2 = 0$)

  D'après le théorème de factorisation, on peut écrire :

  $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$

  On utilise maintenant le théorème 3 pour identifier les coefficients a, b et c avec ceux de $P(x)$:

  $$a = 3 \; ; \; b - 2a = -5 \; ; \; c - 2b = -1 \text{ et } -2c = -2 \text{ d'où } P(x) = (x - 2)(3x^2 + x + 1).$$

  On ne peut pas factoriser davantage car le trinôme $3x^2 + x + 1$ est toujours strictement positif.

  (En effet, $\Delta = -11 < 0$ et $a = 3 > 0$)

  L'intérêt de ce théorème est toujours la résolution d'équations et d'inéquations :

  $$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

- Résoudre l'inéquation $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2 \geqslant 0$

  Il y a deux racines évidentes 1 et -1. En factorisant, on obtient : $(x^2 - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

  Il y a encore 1 et -1 comme racines évidentes, on aboutit alors à : $(x^2 - 1)^2(x - 2)$.

  On conclut facilement : $S = [2 \; ; \; +\infty[\cup \{-1\} \cup \{1\}$

- Résoudre $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ sachant que 2 est racine. Réponse : $S = \{2 \; ; \; 3 \; ; \; -4\}$.